EPREUVES ECRITES

TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Durée : 6 heures

Les dessins demandés dans le texte seront exécutés sur papier millimétrique.

Pour cette épreuve, le problème a été choisi d'une approche assez facile. Les candidats sont prévenus qu'entreront dans l'appréciation des copies le soin apporté à la présentation, la clarté et la précision de la rédaction. Ils sont en particulier invités :

— d'une part à respecter les notations fixées par le texte;

— d'autre part à assortir leur rédaction de figures *soignées*, soit qu'elles soient explicitement demandées dans l'énoncé, soit que, les ayant aidés à réaliser une situation, elles leur permettent de s'exprimer plus clairement, étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux.

Les différentes questions du problème, de difficultés inégales, ont une indépendance relative. Aucun ordre n'est imposé pour les résoudre. A condition de l'indiquer clairement, les candidats pourront utiliser pour la résolution d'une question des résultats fournis par l'énoncé d'une question précédente, même s'ils n'ont pu la résoudre.

Partie 0. — *Notations et définitions*

0.1.

Pour A et B parties d'un même ensemble, on pose

$$A \setminus B = \{ a \in A,\ a \notin B \} \quad .$$

On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des réels, $\mathbf{C}$ celui des complexes. Si A est une partie minorée de $\mathbf{R}$, sa borne inférieure est désignée par $\inf A$.

On considère l'espace métrique $\mathbf{R}^2$ obtenu en munissant $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de son produit scalaire canonique noté $(\,.\mid.\,)$, la norme associée étant notée $\|\,.\,\|$ et la distance associée $d(\,.\,,\,.\,)$. Deux vecteurs (ou points) $\xi = (x, y)$ et $\xi' = (x', y')$ ont pour *déterminant* dans la base canonique le réel $xy' - yx'$ *noté* $\det(\xi, \xi')$.

La lettre $\mathcal{D}$ désigne le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \ ; \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad , \quad y \geqslant 0 \ , \quad x^2 + y^2 \geqslant 1 \right\}.$$

On convient de noter :

$$0 = (0,0) \qquad u = (1,0) \qquad v = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad w = (0,1) \quad .$$

0.2.

On dira qu'une partie Λ de $\mathbf{R}^2$ est un *réseau*, s'il existe au moins une base $\{ \xi, \eta \}$ de $\mathbf{R}^2$ telle que l'on ait :

$$\Lambda = \mathbf{Z}\xi + \mathbf{Z}\eta = \{ p\xi + q\eta \ ; \ (p,q) \in \mathbf{Z}^2 \}.$$

Tout système $\{\xi', \eta'\}$, vérifiant $\Lambda = \mathbf{Z}\,\xi' + \mathbf{Z}\,\eta'$, est dit une *base du réseau*. On *note* respectivement :

Λ_e le réseau dont une base est $\{u, v\}$;

Λ_c le réseau dont une base est $\{u, w\}$;

Λ_r^θ le réseau dont une base est $\{u, \theta w\}$ avec $\theta \geqslant 1$.

Plus généralement un réseau est dit *réduit*, s'il admet une base de la forme $\{u, j\}$ avec $j \in \mathcal{D}$.

Deux réseaux sont dits *isométriques* (resp. *semblables*) s'il existe une isométrie (resp. similitude directe ou indirecte) de $\mathbf{R}^2$ transformant l'un en l'autre. Un réseau semblable à Λ_e est dit *équilatéral*; un réseau semblable à Λ_c (resp. à un Λ_r^θ) est dit *carré* (resp. *rectangulaire*).

0.3.

Pour un réseau quelconque Λ on appelle :

- *carcan* de Λ le nombre réel $\operatorname{carc}\Lambda = \inf\{\|\lambda\|;\ \lambda \in \Lambda \setminus 0\}$;
- *alvéole fondamental* de Λ l'ensemble

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \{\xi \in \mathbf{R}^2;\quad \forall \lambda \in \Lambda,\ d(0, \xi) \leqslant d(\lambda, \xi)\}\ .$$

On introduit aussi

$$\mathcal{A}'(\Lambda) = \{\xi \in \mathbf{R}^2;\quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus 0, d(0, \xi) < d(\lambda, \xi)\}\ .$$

Dans la suite du texte, on écrira en abrégé $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ pour $\mathcal{A}(\Lambda)$ et $\mathcal{A}'(\Lambda)$; on posera aussi, pour tout γ de $\mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\xi + \gamma;\quad \xi \in \mathcal{A}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}'_\gamma = \{\xi + \gamma;\quad \xi \in \mathcal{A}'\}\ .$$

0.4.

Le *stabilisateur* d'un élément x d'un ensemble X, dans lequel opère un groupe G, est : $G_x = \{g \in G;\ g(x) = x\}$.

Partie I. — *Réseaux, classification*

I.1.

Dessiner $\mathcal{D}$.

Sur des figures séparées :

- dessiner Λ_e; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_e)$; trouver $\operatorname{carc}\Lambda_e$;
- dessiner un Λ_r^θ; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_r^\theta)$; trouver $\operatorname{carc}\Lambda_r^\theta$ et $\operatorname{carc}\Lambda_c$.

I.2.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un réseau Λ. Démontrer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à éléments dans $\mathbf{Z}$ vérifiant $|ad - bc| = 1$. Énoncer une réciproque. Donner des exemples de telles matrices sans élément nul.

Établir que le réel $|\det \mathcal{B}|$ dépend seulement du réseau Λ et non du choix de sa base; on le *note* aire Λ. Calculer aire Λ_r^θ et aire Λ_e.

Lorsque Λ est réduit, démontrer que, si $\{u, j\}$ et $\{u, j'\}$ sont deux de ses bases avec j et j' éléments de $\mathcal{D}$, on a nécessairement $j = j'$; on *note* $j(\Lambda)$ le vecteur ainsi canoniquement attaché au réseau réduit Λ.

I.3.

Pour tout Λ démontrer que carc Λ est strictement positif et que les points de Λ sont isolés uniformément par des boules de rayon $\frac{\text{carc}\,\Lambda}{2}$.

Prouver que le nombre $m(\Lambda)$ des éléments λ de Λ satisfaisant à $\|\lambda\| = \text{carc}\,\Lambda$ est non nul et fini.

I.4.

Soit $\{\alpha, \beta\}$ une base de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les conditions :

$$(K) \quad \begin{cases} \|\alpha\| \leqslant \|\beta\| \\ 0 \leqslant (\alpha \mid \beta) \leqslant \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 \end{cases}$$

Démontrer les résultats suivants :

(i) $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\alpha\|$

(ii) $\forall p \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\beta\|$

(iii) si $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $(p, q) \neq (0, 1)$, $(p, q) \neq (0, -1)$, alors $\|p\alpha + q\beta\|^2 \leqslant \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ entraîne $\|p\alpha + q\beta\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2$

I.5.

Prouver que, si ξ est un vecteur de Λ vérifiant $\|\xi\| = \text{carc}\,\Lambda$, il existe η tel que $\{\xi, \eta\}$ soit une base de Λ.

Démontrer que tout réseau Λ possède une base $\{\alpha, \beta\}$ vérifiant (K).

I.6.

Établir que tout réseau est semblable à un réseau réduit et à un seul.

A tout réseau Λ on associe canoniquement, et on *note* encore $j(\Lambda)$ le vecteur de ω canoniquement attaché dans **I.2.** au réseau réduit semblable à Λ. Où est $j(\Lambda)$ si Λ est équilatéral, rectangulaire ou carré?

Discuter $m(\Lambda)$ suivant la position de $j(\Lambda)$ dans ω .

Établir l'inégalité : aire $\Lambda \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{carc}\,\Lambda)^2$ et discuter le cas de l'égalité.

Partie II. — *Isométries d'un réseau, tore plat*

II.1.

Démontrer : $\mathbf{R}^2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ (voir **0.3**)

A-t-on une partition?

Prouver que $\mathcal{A}$ est un hexagone convexe, sauf si Λ est rectangulaire, auquel cas $\mathcal{A}$ est un rectangle. Dessiner le cas général. Démontrer que $\mathcal{A}'$ est l'intérieur de $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}'$ est partout dense dans $\mathcal{A}$.

II.2.

On *note* Γ le groupe Isom Λ des isométries de $\mathbf{R}^2$ conservant globalement Λ, *et* $T = \text{Trans}\,\Lambda$ le sous-groupe de Γ constitué par le groupe additif Λ opérant sur $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire par les translations $\xi \longrightarrow \xi + \lambda$ avec $\lambda \in \Lambda$. Démontrer que T est distingué dans Γ. Soit G le groupe-quotient Γ/T, isomorphe au stabilisateur de 0 dans Γ; démontrer que G est un groupe fini, discuter le nombre de ses éléments et sa structure selon $j(\Lambda)$. Discuter dans G l'équation $s^n = e$, où e est l'élément neutre.

II.3.

Pour une base $\mathcal{B} = \{ \xi , \eta \}$ de $\mathbf{R}^2$, soit $\delta(\mathcal{B})$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ de la forme $\rho\xi + \rho'\eta$ avec $(\rho, \rho') \in \mathbf{R}^2$ et $|\rho| + |\rho'| \leqslant \frac{1}{2}$, et $\Delta(\mathcal{B})$ la réunion des images de $\delta(\mathcal{B})$ par les translations $p\xi + q\eta$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $p + q$ pair. On choisit $\xi = (1, 0)$ et $\eta = (2, 1)$, et on note $\mathcal{H}$ l'ensemble $\Delta(\mathcal{B})$ correspondant. La base canonique étant figurée orthonormée (unité de longueur de 4 cm environ), représenter $\mathcal{H}$ par des hachures sur un dessin.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est-il stable par le groupe Trans Λ_c?

II.4.

Étant donné un réseau Λ, on appelle ici *tore plat associé à* Λ, et on *notera* Tore Λ, le groupe-quotient $\mathbf{R}^2/\Lambda$ du groupe additif de $\mathbf{R}^2$ par le sous-groupe Λ, c'est-à-dire l'ensemble des classes $\Lambda + \xi$ avec $\xi \in \mathbf{R}^2$. La projection canonique $\mathbf{R}^2 \longrightarrow$ Tore Λ sera notée φ.

Démontrer que pour tout γ de $\mathbf{R}^2$ la restriction de φ à $\mathcal{A}'_\gamma$ (voir **0.3.**) est injective. On notera $\psi_\gamma : \varphi(\mathcal{A}'_\gamma) \longrightarrow \mathcal{A}'_\gamma$ l'application inverse de la double restriction de $\varphi : \mathcal{A}'_\gamma \longrightarrow \varphi(\mathcal{A}'_\gamma)$. Pour $\Lambda = \Lambda_c$ dessiner sur une même figure les deux ensembles $(\psi_0 \circ \varphi)(\mathcal{H})$ et $(\psi_\gamma \circ \varphi)(\mathcal{H})$ où ψ_0 correspond à $\gamma = (0, 0)$ et ψ_γ à $\gamma = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Partie III. — *Dualité, spectre d'un réseau*

III.1.

A un réseau Λ on associe la partie Λ^* de $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\Lambda^* = \{ \eta \in \mathbf{R}^2 \quad ; \ \forall \lambda \in \Lambda, \ (\eta \mid \lambda) \in \mathbf{Z} \} \quad .$$

Démontrer que Λ^* est aussi un réseau; on l'appelle le *dual* de Λ.

Établir : $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ et aire Λ . aire $\Lambda^* = 1$.

Dessiner sur une même figure Λ_0 et Λ^*_0, où Λ_0 est le réseau admettant pour base $\left\{ \left(\frac{4}{5}, 0\right), \ (1, 1) \right\}$.

Démontrer que le dual d'un Λ lui est semblable, c'est-à-dire que l'on a : $j(\Lambda^*) = j(\Lambda)$. La similitude peut-elle toujours être choisie directe?

III.2.

Étant donné un réseau Λ, une fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite Λ-*périodique* si, pour tout élément ξ de $\mathbf{R}^2$ et tout élément λ de Λ, on a

$$f(\xi + \lambda) = f(\xi) \quad .$$

A tout élément γ de $\mathbf{R}^2$, on associe la fonction f_γ définie par

$$\xi \longrightarrow f_\gamma(\xi) = \exp[2i\pi(\xi \mid \gamma)] \quad ;$$

f_γ peut-elle être Λ-périodique?

Pour toute fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe C^2 on pose

$$\mathrm{D}f = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ;$$

établir, quel que soit l'élément γ de $\mathbf{R}^2$, $\mathrm{D}f_\gamma = 4\pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma$.

III.3.

On appelle *valeur propre* du réseau Λ tout réel μ *non nul*, tel qu'il existe $\eta \in \Lambda^*$ satisfaisant à : $\mu = 4\pi^2 \|\eta\|^2$. La *multiplicité, notée* $m(\mu)$, d'une valeur propre μ est par définition le nombre des éléments η de Λ^* solutions de $4\pi^2\|\eta\|^2 = \mu$. Démontrer que $m(\mu)$ est pair pour tout Λ et pour tout μ.

On appelle *spectre* de Λ l'ensemble, *noté* Spec Λ, des couples $(\mu, m(\mu))$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres de Λ.

On note $\mu_1(\Lambda)$ la plus petite valeur propre :

$$\mu_1(\Lambda) = \inf\{4\pi^2 \|\eta\|^2 ; \eta \in \Lambda^* \setminus 0\}.$$

Établir : aire $\Lambda \cdot \mu_1(\Lambda) \leqslant \dfrac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$ et discuter le cas de l'égalité.

III.4.

Déterminer les valeurs propres de Λ_e, Λ_r^θ et Λ_c.

Pour Λ_c, calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$20\pi^2, \ 36\pi^2, \ 100\pi^2, \ 1\,460\pi^2 .$$

Quel est le P.G.C.D. des $m(\mu)$ relatifs à Λ_c ?

Pour Λ_e calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$\frac{16\pi^2}{3}, \ \frac{112\pi^2}{3}, \ 2\,128\pi^2 .$$

Que peut-on dire de $m(\mu)$ pour les valeurs propres de Λ_e?

III.5.

Existe-t-il des réseaux dont toutes les valeurs propres vérifient $m(\mu) = 2$?

III.6.

Démontrer que deux réseaux Λ et Λ' ont le même spectre si, et seulement si, ils sont isométriques.

III.7.

Étant donné un réseau Λ, on range ses valeurs propres par ordre croissant : $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$

Démontrer que la série $\sum_i m(\mu_i) e^{-t\mu_i}$ est convergente pour tout réel t strictement positif; on note $S(t)$ sa somme.

Il pourra être commode d'introduire des alvéoles relatifs à Λ^* et des intégrales doubles d'une fonction $(x, y) \longrightarrow g_\tau(x, y) = e^{-\tau(x^2+y^2)}$.

III.8.

Démontrer que $S(t)$ est, quand t tend vers 0 par valeurs positives, un infiniment grand équivalent à $\dfrac{\text{aire } \Lambda}{4\pi t}$. On pourra pour cela faire intervenir des intégrales doubles de deux fonctions g_τ.